عباس قلعه‌پور اقدم

ردپای طلایی

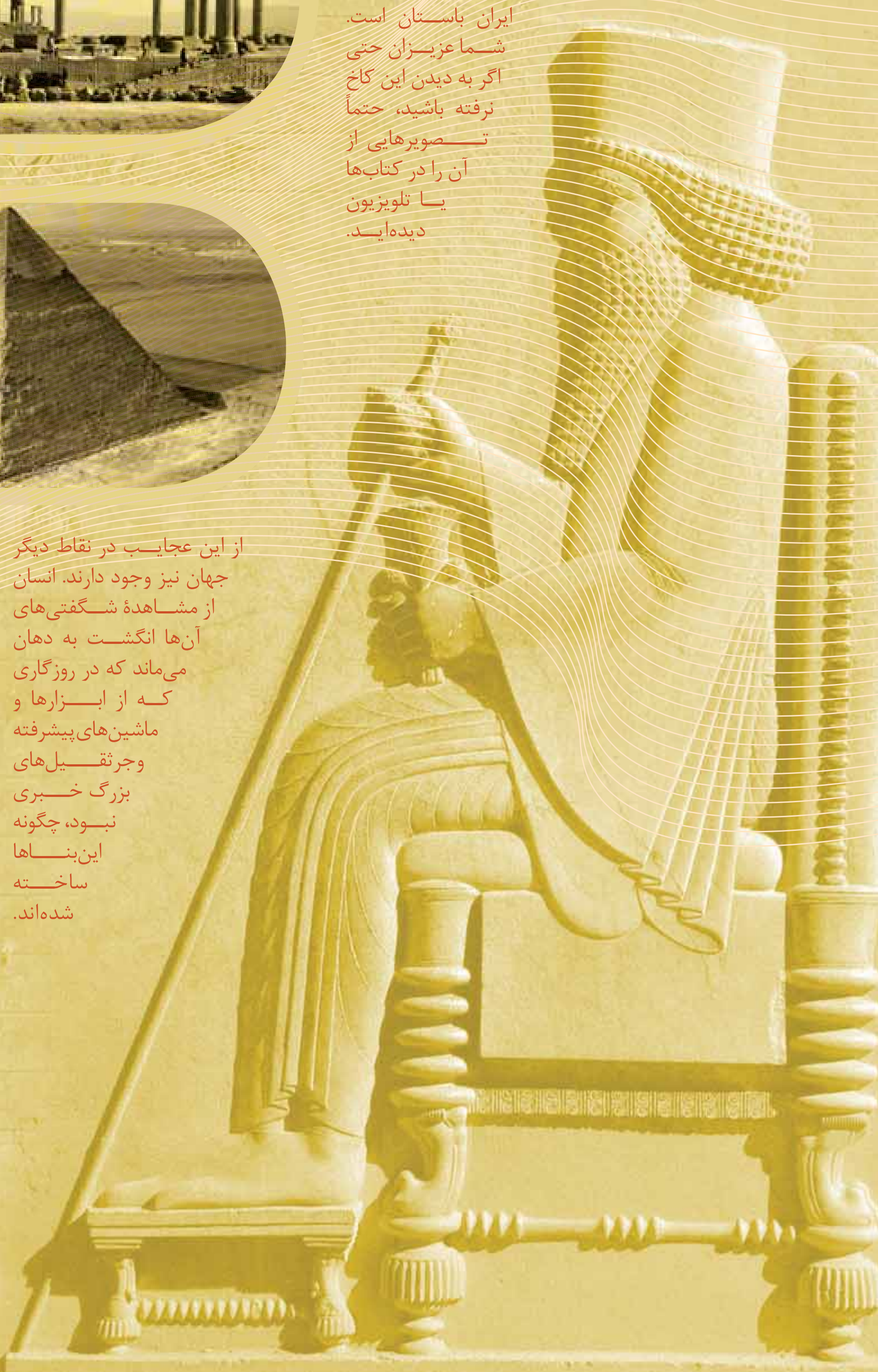
قسمت اول

نسبت طلایی در شانزده اثر باستانی جهان

کاخ تخت‌جمشید (در حدود ۶۰ کیلومتری شیراز) که بقایای آن پس از حدود ۲۵۰۰ سال هنوز عظمت و شکوه این بنای خارق‌العاده و هوش و فراست سازندگان آن را نشان می‌دهد، یکی از شاهکارهای معماری ایران باستان است. شما عزیزان حتی اگر به دیدن این کاخ نرفته باشید، حتماً تصویرهایی از آن را در کتاب‌ها یا تلویزیون دیده‌اید.

تخت‌جمشید/ استان فارس

هرم خوفو/ مصر



از این عجایب در نقاط دیگر جهان نیز وجود دارند. انسان از مشاهدهٔ شگفتی‌های آن‌ها انگشت به دهان می‌ماند که در روزگاری که از ابزارها و ماشین‌های پیشرفته و جرثقیل‌های بزرگ خبری نبود، چگونه این بناها ساخته شده‌اند.

بناهایی که در زمان کنونی نیز با وجود انواع وسایل، بشر نه‌تنها قادر به ساختن آن‌ها نیست، بلکه هنوز تمامی رازها و نکته‌های ریاضی به کار رفته در ساخت آن‌ها را نیز کشف نکرده است. ما تنها توانسته‌ایم به گوشه‌ای از مهندسی و ریاضیات موجود در آن‌ها پی ببریم.

یکی دیگر از این عجایب، اهرام ثلاثهٔ مصر است که پس از گذشت حدود ۴۶۰۰ سال هنوز عظمت و زیبایی آن‌ها انسان را به تعجب وامی‌دارد. تخت‌جمشید و هرم‌های مصر دو مورد از ۱۶ اثر باستانی جهان هستند که در این چند مقاله که هر ماه می‌توانید آن‌ها را دنبال کنید و اکنون در حال مطالعهٔ قسمت اول آن هستید، بررسی خواهند شد. با عدد جالبی به نام «نسبت طلایی» آشنا خواهید شد و خواهید دید که بین فاصله‌های این ۱۶ اثر، این عدد بسیار دیده می‌شود. ولی ابتدا باید «عدد فی» یا همان نسبت طلایی را بشناسید.

معرفی نسبت طلایی

در ریاضی بعضی عددها خاص هستند، مانند عدد پی (نسبت محیط هر دایره به قطر آن) که در مورد آن چیزهایی می‌دانید. برای مثال آن را با «π» (حرف پی یونانی) نشان می‌دهند. عدد پی، عدد گنگی است و با دقت دو رقم اعشار برابر ۳/۱۴ است. در اینجا می‌خواهم شما را با عدد خاص دیگری که آن هم گنگ است و به «نسبت طلایی» معروف است، آشنا کنم.

عدد $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ را «عدد طلایی» یا «نسبت طلایی» می‌نامند و آن را با φ (حرف فی یونانی) نشان می‌دهند. این عدد از دو نظر ویژگی‌های خاصی دارد: یکی از نظر ریاضی و دیگری از نظر وجود آن در طبیعت که باعث زیبایی و جذابیت پدیده‌هایی می‌شود که در اندازه‌های آن‌ها این عدد وجود دارد. به همین خاطر، نقاشان، مجسمه‌سازان، معماران و ... سعی کرده‌اند از این عدد در اثرهای خود استفاده کنند تا باعث زیبایی هرچه بیشتر شود. ویژگی‌های آن عبارت‌اند از:

۱. تنها عدد مثبتی است که اگر یک واحد به آن اضافه شود، مجذورش به دست می‌آید، این یعنی مربع این عدد از خودش یک واحد بزرگ‌تر است. به زبان ریاضی این‌طور می‌شود: $\varphi^2=\varphi+1$

بیایید آزمایش کنیم:

$$\varphi^2=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2=\frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}+1)}{4}=\frac{5+\sqrt{5}+\sqrt{5}+1}{4}=\frac{6+2\sqrt{5}}{4}=\frac{2(3+\sqrt{5})}{4}=\frac{\sqrt{5}+3}{2}$$

$$\varphi+1=\frac{\sqrt{5}+1}{2}+1=\frac{\sqrt{5}+1+2}{2}=\frac{\sqrt{5}+3}{2}$$

نکته: عدد $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ نیز دارای همین ویژگی است، ولی توجه داشته باشید که این عدد منفی است و φ تنها عدد مثبت با این ویژگی است.

نوبت شما: نشان دهید که مجذور عدد $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ از خودش یک واحد بزرگ‌تر است.

۲. تنها عدد مثبتی است که وارونش از خودش یک واحد کمتر است؛ یعنی: $\frac{1}{\varphi}=\varphi-1$

این را هم آزمایش می‌کنیم:

$$\varphi-1=\frac{\sqrt{5}+1}{2}-1=\frac{\sqrt{5}+1-2}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\frac{1}{\varphi}=\frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}=\frac{2}{\sqrt{5}+1}=\frac{2(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}$$

$$=\frac{2(\sqrt{5}-1)}{(5-\sqrt{5}+\sqrt{5}-1)}=\frac{2(\sqrt{5}-1)}{4}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

نوبت شما: در مورد عدد منفی $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ این ویژگی را بررسی کنید.

پیش از اینکه به سراغ ویژگی سوم برویم، نمایش اعشاری عدد فی را یاد بگیریم.

برای نمایش φ به‌صورت اعشاری باید ابتدا با ماشین حساب یا جذرگیری، $\sqrt{5}$ را به‌شکل اعشاری داشته باشیم:

$$\sqrt{5}\simeq 2/2360679774$$

این مقدار تقریبی $\sqrt{5}$ با دقت ۱۰ رقم اعشار است. برای محاسبهٔ φ، به این مقدار یک واحد اضافه و سپس آن را نصف می‌کنیم:

$$2/2360679774+1=3/2360679774$$

$$3/2360679774\div 2=1/6180339887$$

$$\varphi\simeq 1/6180339887$$

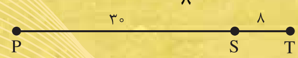
نسبت طلایی با دقت ۱۰ رقم اعشار به دست آمد. البته بیشتر وقت‌ها همان ۱/۶ یا ۱/۶۱۸ را برای φ در نظر می‌گیرند؛ همان‌طور که در بعضی از محاسبه‌ها که به‌دقت بالایی نیاز نیست، π را ۳ می‌گیریم. حتماً تا به حال شنیده‌اید که می‌گویند: «وقت طلاست.» این یعنی وقت و عمر انسان ارزش زیادی دارد. یا به‌عنوان مثال، نفت را «طلای سیاه»، زباله را «طلای کثیف» و زعفران را «طلای سرخ» می‌گویند. در واقع چیزهای با ارزش را به طلا تشبیه می‌کنند. خُب! عدد φ علاوه بر این دو ویژگی که یاد گرفتیم، چه خصوصیت‌های عجیب دیگری دارد که آن را با ارزش می‌کند؟ همچنین چرا این عدد را نسبت طلایی می‌نامند و نه عدد طلایی؟

دلیل ارزشمند بودن عدد فی این است که انسان آن را در طبیعت کشف کرده است. یعنی نمونه‌های زیادی در جهان هستی و از جمله در بدن خود ما وجود دارند که نسبت برخی از اندازه‌ها با این عدد برابر

می‌شود. برای مثال، در گل آفتاب‌گردان دانه‌هایی که به شکل مارپیچ رشد کرده‌اند، نسبت قطر هر مارپیچ به مارپیچ قبلی برابر عدد فی اســت. در مارپیچ‌هــای حلزون نیز همین نکته وجــود دارد. جای دوری نرویم. در همین بدن انسان (در اندازه‌های استخوان‌ها، فاصلهٔ چشم‌ها و گوش‌ها و...) بارها می‌توان حضور این عدد را دید.

تقسیم پاره‌خط به نسبت طلایی

در شــکل ۱، پاره‌خط PT توسط نقطهٔ S به دو پاره‌خط PS و ST تقســیم شــده اســت، به‌طــوری کــه $PS = ۳۰cm$ و $ST = ۸cm$ می‌گوییم نسبت پاره‌خط PS به ST برابر $\frac{۳۰}{۸}$ یا ۳/۷۵ است.



شکل ۱

$$\frac{PS}{ST} = \frac{۳۰}{۸} = ۳/۷۵$$

اگــر پاره‌خطــی را بــه دو پاره‌خط غیر هم‌اندازه چنان تقســیم کنیم که نسبت پاره‌خط بزرگ‌تر بــه پاره‌خط کوچک‌تر برابر نسبت کل پاره‌خط به پاره‌خط بزرگ تر باشد، می‌گوییم این پاره‌خط به نسبت طلایی تقسیم شده است.

شــاید از این تعریف چیز زیادی متوجه نشده باشــید، پس روی شکل ۲ توضیح می‌دهم.

پاره‌خــط AB را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم نقطهٔ C روی ایــن پاره‌خط چنان باشد که $AC > CB$ و $\frac{AC}{CB} = \frac{AB}{AC}$ (AC پاره‌خط بزرگ‌تــر و CB پاره‌خط کوچک‌تر). در این صورت می‌گوییم نقطهٔ C پاره‌خط AB را به‌نسبت طلایی تقسیم کــرده اســت و C را نقطــهٔ طلایی AB می‌نامیم. اگر این شرایط به وجود آید، این نسبت برابر عدد فی خواهد بود.

شکل ۲

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AB}{AC} = \varphi$$

مثال۱. آیا نقطهٔ P در شــکل ۳ پاره‌خط MN را به‌نســبت طلایی تقســیم کرده است؟

شکل ۳

پاســخ: P نقطهٔ طلایــی پاره‌خط MN نیست، زیرا: $\frac{MP}{PN} = \frac{۷۲}{۲۸}$ و

$$\frac{MN}{MP} = \frac{۷۲+۲۸}{۷۲} = \frac{۱۰۰}{۷۲} \quad , \quad \frac{۷۲}{۲۸} \neq \frac{۱۰۰}{۷۲} \neq \varphi$$

مثال۲. آیا در شــکل ۴ نقطهٔ C پاره‌خط AB را به‌نســبت طلایی تقســیم کرده است؟

شکل ۴

$$\frac{AC}{CB} = \frac{۷۶۹۲}{۴۷۵۴} = ۱/۶۱۸۰۰۵$$

(با دقت ۶ رقم اعشار)

$$\frac{AB}{AC} = \frac{۷۶۹۲+۴۷۵۴}{۷۶۹۲} = \frac{۱۲۴۴۶}{۷۶۹۲} = ۱/۶۱۸۰۴۴$$

(با دقت ۶ رقم اعشار)

چون با دقت ســه رقــم اعشــار داریم: $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB} = \varphi$، پس C نقطــهٔ طلایی AB است.

نکته: حتی اگر با دقت دو رقم اعشــار یا یک رقم اعشار نسبت‌ها با هم برابر باشند، می‌گوییم پاره‌خط به نسبت طلایی تقسیم شده است.

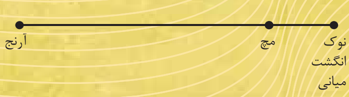
برویم سراغ بدن انسان. سه نمونه از وجود عدد فی در اندازه‌های طولی بدن عبارت‌اند از:

۱. نسبت قد انسان به فاصلهٔ ناف تا پاشنهٔ پا (نــاف یکی از نقطه‌هــای طلایی بدن است).

نســبت فاصلهٔ ناف تا زانو به فاصلهٔ زانو تا پاشنه.

نسبت فاصلهٔ نوک انگشتان دست تا آرنج به فاصلهٔ مچ تا آرنج.

مورد سوم را با شکل ۵ توضیح می‌دهم.



شکل ۵

$$\varphi = \frac{\text{فاصلهٔ آرنج تا نوک انگشت}}{\text{فاصلهٔ آرنج تا مچ}} = \frac{\text{فاصلهٔ آرنج تا مچ}}{\text{فاصلهٔ مچ تا نوک انگشت}}$$

می‌توانید آزمایش کنید. البته این تساوی در مورد افرادی که استخوان‌بندی آن‌ها به رشد کامل رسیده (در حدود ۲۰ سال به بالا) به عدد فی نزدیک‌تر است.

در قســمت بعدی با مثلث و مســتطیل طلایی و هشت مورد از آن ۱۶ اثر شگرف آشنا خواهید شد.